UEBER DIE BEWEGUNG EINER HOMOGENEN SCHWEREN GERADEN UNTER GEWISSEN VORAUSSETZUNGEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG

DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWÜRDE

DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER UNIVERSITÄT FREIBURG IN BADEN

VORGELEGT

VON

LOUIS SCHÖNLICHT

AUS WETTIN.

HALLE A/S.

DRUCK VON EHRHARDT KARRAS.

1884.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550801_0162

Von einer homogenen schweren Geraden AB ist der eine Endpunkt A gezwungen auf einer Vertikalen zz' zu bleiben, der andere B ist in einer horizontalen Ebene E beweglich. Wie bewegt sich die Vorrichtung unter dem Einfluss der Schwere, wenn zur Zeit $t = 0$ die Punkte A und B gegebene, mit dem Apparat verträgliche, Geschwindigkeiten haben?

Es werde (s. Figur 1) zz' zur z Axe, E zur xy Ebene genommen, die Schwere wirke in der Richtung der negativen z, ferner habe Punkt A die Coordinaten z_1 ($x_1 = 0$, $y_1 = 0$), B die Coordinaten x_3 und y_3 ($z_3 = 0$). AB sei gleich $2l$, und, wenn $M(xyz)$ ein beliebiger Punkt, $AM = i$; $MB = 2l - i$.

Es ist dann:

$$z = z_1 \frac{(2l-i)}{2l}; \quad x = x_3 \frac{i}{2l}; \quad y = y_3 \frac{i}{2l}, \text{ somit}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z_1}{dt^2} \frac{2l-i}{2l}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_3}{dt^2} \frac{i}{2l}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_3}{dt^2} \frac{i}{2l}$$

$$\text{und } \delta z = \delta z_1 \frac{2l-i}{2l}; \quad \delta x = \delta x_3 \frac{i}{2l}; \quad \delta y = \delta y_3 \frac{i}{2l}.$$

Setzen wir diese Werthe ein in die Gleichung des d'Alembertschen Prinzips:

$$\Sigma \left\{ \left(X_\nu - m \frac{d^2x_\nu}{dt^2} \right) \delta x_\nu + \left(Y_\nu - m \frac{d^2y_\nu}{dt^2} \right) \delta y_\nu + \left(Z_\nu - m \frac{d^2z_\nu}{dt^2} \right) \delta z_\nu \right\} = 0,$$

dann geht diese über, in Berücksichtigung dass

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma Z = -g\,\Sigma m = -Mg,$$

wo M die Masse der Geraden, in:

$$\frac{d^2x_3}{dt^2}\,\Sigma m\left(\frac{i}{2l}\right)^2 \delta x_3 + \frac{d^2y_3}{dt^2}\,\Sigma m\left(\frac{i}{2l}\right)^2 \delta x_3$$
$$+\left[\frac{d^2z_1}{dt^2}\,\Sigma m\left(\frac{2l-i}{2l}\right)^2 + g\,\Sigma m\left(\frac{2l-i}{2l}\right)\right]\delta z_1 = 0.$$

Dividiren wir allseitig mit $\Sigma m\left(\frac{i}{2l}\right)^2$, dann ergiebt sich:

$$\frac{d^2x_3}{dt^2}\,\delta x_3 + \frac{d^2y_3}{dt^2}\,\delta y_3 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\,\frac{\Sigma m\left(\frac{2l-i}{2l}\right)^2}{\Sigma m\left(\frac{i}{2l}\right)^2}\,\delta z_1$$
$$+ g\,\frac{\Sigma m\,\frac{2l-i}{2l}}{\Sigma m\left(\frac{i}{2l}\right)^2}\,\delta z_1 = 0.$$

Hier ist der Faktor von $\frac{d^2z_1}{dt^2}\,\delta z_1$, nämlich

$$\frac{\Sigma m\left(\frac{2l-i}{2l}\right)^2}{\Sigma m\left(\frac{i}{2l}\right)^2} = \frac{\Sigma m\,(2l-i)^2}{\Sigma m i^2} = 1,$$

denn der Zähler des Bruches ist das Trägheits-Moment der schweren Geraden in Bezug auf eine Axe welche in B auf ihr senkrecht steht, der Nenner das Trägheits-Moment derselben in Bezug auf eine ebensolche Axe die durch A geht, und diese beiden Trägheits-Momente sind einander gleich.

Im Faktor von $g\delta z_1$, $\frac{\Sigma m\,\frac{2l-i}{2l}}{\Sigma m\left(\frac{i}{2l}\right)^2} = \frac{\Sigma m\,(2l-i)}{\Sigma m i^2}\,2l$, ist

$\Sigma m\,(2l-i) = M\,l$; ferner ist $\Sigma m i^2 = Mk^2$, wo k der Trägheits-Radius der Geraden, und $k^2 = \frac{4l^2}{3}$. Dieser Faktor wird hiermit zu: $\frac{Ml\,2l}{M\,\frac{4l^2}{3}} = \frac{3}{2}$, und unsere Bewegungsgleichung

nimmt die Gestalt an:

$$\frac{d^2x_3}{dt^2}\,\delta x_3 + \frac{d^2y_3}{dt^2}\,\delta y_3 + \left(\frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{3}{2}g\right)\delta z_1 = 0, \qquad \text{I.}$$

Aus der Bedingungsgleichung $z_1^2+x_3^2+y_3^2 = 4l^2$ folgt:

$$\lambda\,(z_1\,\delta z_1 + x_3\,\delta x_3 + y_3\,\delta y_3) = 0,$$

und in bekannter Weise ergiebt sich das Gleichungssystem:

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} + \frac{\lambda\,x_3}{l} = 0; \quad \frac{d^2y_3}{dt^2} + \frac{\lambda\,y_3}{l} = 0; \quad \frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{3}{2}g + \frac{\lambda\,z_1}{l} = 0. \qquad \text{II.}$$

Die Bewegungsgleichungen II beziehen sich auf die Punkte A und B. Bemerken wir dass der Mittel- oder Schwerpunkt S der homogenen Geraden, wie eine einfache geometrische Betrachtung ergiebt, stets auf einer mit dem Radius l um den Anfangspunkt 0 beschriebenen Kugel liegen muss, dann empfiehlt es sich die Bewegung dieses Schwerpunktes zum Gegenstande der Erörterung zu nehmen.

Seien die Coordinaten von S: x_2, y_2, z_2, wo $x_2 = {}^1/_2x_3$, $y_2 = {}^1/_2y_3$, $z_2 = {}^1/_2z_1$, somit $\frac{d^2x_3}{dt^2} = 2\,\frac{d^2x_2}{dt^2}$ etc., dann gestaltet sich das System II um in:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{\lambda x_2}{l} = 0; \quad \frac{d^2y_2}{dt^2} + \frac{\lambda y_2}{l} = 0; \quad \frac{d^2z_2}{dt^2} + \frac{3g}{4} + \frac{\lambda z_2}{l} = 0,$$

oder, wenn wir die nunmehr überflüssigen Indices weglassen, in:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda x}{l} = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\lambda y}{l} = 0; \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{3g}{4} + \frac{\lambda z}{l} = 0. \qquad \text{III.}$$

Aus voriger Bemerkung folgt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2, \quad \text{und} \quad x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt} + z\,\frac{dz}{dt} = 0, \qquad 1.$$

weiter, in Anwendung dieser Relationen durch Integration aus III

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v^2 = C - \frac{3}{2}gz, \qquad 2.$$

dies die Gleichung der lebendigen Kraft, und

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = f, \text{ wo } f \text{ die Flächenconstante,} \qquad 3.$$

dies die Gleichung des Prinzips der Flächen.

Für den Anfangszustand, wo $AO = 2z_0$, gestaltet sich (2) zu

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2_{t=0} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2_{t=0} + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2_{t=0} = v_0^2 = C - \frac{3}{2}gz_0,$$

damit ist $$v^2 = v_0^2 + \frac{3}{2}g(z_0 - z).$$

Erheben wir (3) zum Quadrat, dann ist

$$x^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 2xy\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + y^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = f^2$$

aus (1) folgt: $x^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2xy\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + y^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = z^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$

folglich ist: $(x^2+y^2)\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\} = f^2 + z^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$ und

wegen $x^2+y^2 = l^2 - z^2$, sowie $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$

$= v_0^2 + \frac{3}{2}g(z_0 - z) - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$

$$(l^2 - z^2)\left\{v_0^2 + \frac{3}{2}g(z_0 - z) - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} = f^2 + z^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (l^2 - z^2)\left\{v_0^2 + \frac{3}{2}g(z_0 - z)\right\} - f^2, \qquad 4.$$

und, wenn wir einführen $v_0^2 = \frac{3}{2}g\,z_4$; $f^2 = \frac{3}{2}g\,(l^2 - z_0^2)z_5$

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{2}\left\{(l^2 - z^2)(z_4 + z_0 - z) - (l^2 - z_0^2)z_5\right\} \qquad 4^*.$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{\frac{3g}{2}}}{l}\sqrt{Z}; \quad dt\frac{\sqrt{6g}}{2l} = \frac{dz}{\sqrt{Z}}. \qquad \text{IV.}$$

Nach der Aufgabe sind nun die Anfangsgeschwindigkeiten der Punkte A und B gegeben, somit

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)_{t=0} \text{ etwa } = a; \quad \left(\frac{dy_3}{dt}\right)_{t=0} = b; \quad \left(\frac{dz_1}{dt}\right)_{t=0} = d,$$

und, da $z_1 = 2z$, $x_3 = 2x$, $y_3 = 2y$, und $\frac{dz_1}{dt} = 2\frac{dz}{dt}$ etc. $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = \frac{a}{2}$; $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = \frac{b}{2}$; $\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} = \frac{d}{2}$, womit uns die Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunktes S

$$v_0^2 = {}^1/_4(a^2+b^2+d^2)$$

bekannt ist.

Beginne ferner die Bewegung in der zx Ebene, d. h. werde die durch die Anfangslage von AB und die z Axe bestimmte Ebene zu der der zx genommen, dann ist $y_0 = 0$, und da (1) für alle Zeiten, so auch für $t = 0$ gilt,

$$x_0\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} + z_0\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} = 0, \text{ d. h. } x_0\frac{a}{2} + z_0\frac{d}{2} = 0.$$

$$a = -\frac{z_0 d}{x_0} = -\frac{z_0 d}{\sqrt{l^2 - z_0^2}}; \quad v_0^2 = {}^1/_4\left(\frac{d^2 l^2}{l^2 - z_0^2} + b^2\right) \quad 5.$$

Wir können uns vorstellen es treffe die materielle Gerade ein Schlag in bestimmter Richtung. Geht derselbe schräg von oben nach unten, so wird ihr Fall ein beschleunigter werden, sie sich ausserdem in gewisser Weise um die z Axe winden. Ob diese Windung von rechts nach links, also im Uhrzeigersinne, oder im entgegengesetzten erfolgt, spielt für die Rechnung keine Rolle, da im letzteren Falle der Werth von $\left(\frac{dy_3}{dt}\right)_{t=0}$ nur mit entgegengesetztem Vorzeichen einzuführen wäre. Geht der Schlag schräg von unten nach oben, dann ist $\left(\frac{dz_1}{dt}\right)_{t=0}$ das umgekehrte Zeichen zu geben, die Gerade wird sich auf die z Axe zu bewegen, und Punkt A auf dieser in die Höhe steigen. Diesen Fall als den interessanteren werden wir betrachten, somit d als positiv ansehen; ein negatives d vergrössert gewissermassen nur die Wirkung der Schwere, und bietet nichts Neues.

$b = 0$ heisst: die Bewegung findet nur in der zx Ebene statt. Gleichung (5), die sich auch aus statischen Betrachtungen ableiten liesse, zeigt dass a absolut mit d wächst, die Geschwindigkeit des Punktes B in der x Richtung ist also abhängig von der Geschwindigkeit des Punktes A.

Die $\pm y$ Geschwindigkeit von B nur von der gegebenen Grösse b. Wäre y_0 nicht Null, dann erhielten wir die gleiche Composition von v_0, wenn wir die gegebene Anfangsgeschwindigkeit des Punktes B in 2 Componenten zerlegten, von denen die eine in die Richtung der Projection der Geraden AB auf die xy Ebene fällt, die andere die auf dieser Projection Senkrechte ist.

Führen wir den Winkel φ ein, den $0B$ mit x einschliesst, und sei $BAZ' = \vartheta$, dann geht (3) über in

$$l^2 \sin^2 \vartheta \frac{d\varphi}{dt} = (l^2 - z^2)\frac{d\varphi}{dt} = f, \qquad 6.$$

und da für $t = 0$ folgt: $x_0\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = x_0\frac{b}{2} = \sqrt{l^2 - z_0^2}\,\frac{b}{2} = f,$

und aus der vorigen Relation ebenso $(l^2 - z_0^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = f,$

so zeigt sich dass $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = \varphi_0' = \frac{b}{2\sqrt{l^2 - z_0^2}}$, ferner da

$f^2 = (l^2 - z_0^2)\,\frac{b^2}{4} = (l^2 - z_0^2)\frac{3g}{2}z_5$, ist $\frac{b^2}{4} = \frac{3g}{2}z_5$, $b = \sqrt{6g\,z_5}$.

Wegen (6) ist $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{l^2 - z_0^2}}{2(l^2 - z^2)}\,b$, und endlich wegen IV

$$d\varphi = \frac{lb\sqrt{l^2 - z_0^2}}{\sqrt{6g}\,(l^2 - z^2)}\,\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{l\sqrt{z_5(l^2 - z_0^2)}}{l^2 - z^2}\,\frac{dz}{\sqrt{Z}}. \qquad V.$$

Die elliptischen Differential-Gleichungen IV und V bestimmen die Bewegung der Geraden vollständig.

Die aus dem d'Alembert'schen Prinzipe sich ergebenden Kräfte-Gleichungen reichten hin die Bewegung der Geraden zu bestimmen. Die Momente-Gleichungen leiten wir ab indem wir die Widerstände P und Q als Kräfte einführen,

und das System sodann als freies betrachten. Es gilt dann für den Schwerpunkt: (S. Figur 2.)

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = P\cos\varphi = X;\quad M\frac{d^2y}{dt^2} = P\sin\varphi = Y;$$

$$M\frac{d^2z}{dt^2} = -Mg + Q. \qquad \text{a.}$$

Ferner: $$\Sigma m_\nu\left(y_\nu\frac{d^2z_\nu}{dt^2} - z_\nu\frac{d^2y_\nu}{dt^2}\right) = \Sigma(yZ - zY),$$

und $$\Sigma m_\nu\left(z_\nu\frac{d^2x_\nu}{dt^2} - x_\nu\frac{d^2z_\nu}{dt^2}\right) = \Sigma(zX - xZ). \qquad \text{b.}$$

Somit:

$$\left(y_3\frac{d^2z_1}{dt^2} - z_1\frac{d^2y_3}{dt^2}\right)\Sigma m\ \frac{i(2l-i)}{(2l)^2} = -yMg + 2yQ - 2z\ P\sin\varphi$$

oder, da $\Sigma m\ \frac{i\ (2l-i)}{(2l)^2} = \frac{l}{3}$, und $M = 2l$, wenn wir für P und Q die Werthe aus (a) einsetzen:

$$4\frac{l}{3}\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -2lgy + 2y\left(2l\frac{d^2z}{dt^2} + 2lg\right) - 2z\ 2l\frac{d^2y}{dt^2}$$

und vereinfacht: $$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{3}{4}gy.$$

Entsprechend ist:

$$4\frac{l}{3}\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 2z\ P\cos\varphi + x\,Mg - 2x\,Q$$

$$= 2z\ 2l\frac{d^2x}{dt^2} + x\ \ 2lg - 2x\left(2l\frac{d^2z}{dt^2} + 2lg\right);$$

damit $$z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = +\frac{3}{4}gx.$$

Setzen wir hier ein

$$x = l\sin\vartheta\cos\varphi;\quad y = l\sin\vartheta\ \sin\varphi;\quad z = l\cos\vartheta,$$

dann wird bei Ausführung der Differentiationen:

$$-\frac{3}{4}gl\sin\vartheta\sin\varphi$$

$$= -l^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} + l^2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$-2l^2\cos^2\vartheta\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} - l^2\sin\varphi\frac{d^2\vartheta}{dt^2}.$$

$$+\frac{3}{4}gl\sin\vartheta\cos\varphi$$

$$= -l^2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} - l^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$-2l^2\cos^2\vartheta\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} + l^2\cos\varphi\frac{d^2\vartheta}{dt^2}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{3}{4}gl\sin\vartheta = l^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - l^2\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Setzen wir ein: $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{f}{l^2\sin^2\vartheta}$, dann wird

$$l^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - \frac{f^2\cos\vartheta}{l^2\sin^3\vartheta} = \frac{3}{4}lg\sin\vartheta,$$

somit durch Integration:

$$l^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \frac{f^2}{l^2\sin^2\vartheta} = C - \frac{3}{2}gl\cos\vartheta,$$

und endlich

$$l^2\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2_{t=0}\right] + f^2\left(\frac{1}{l^2\sin^2\vartheta} - \frac{1}{l^2\sin^2\vartheta_0}\right)$$

$$= \frac{3}{2}gl(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta).$$

Diese Gleichung stimmt aber genau mit (4) überein, denn multipliziren wir beide Seiten mit $l^2\sin^2\vartheta$, und berücksichtigen wir dass $l^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$, dann zeigt sich:

$$l^2 l^2 \sin^2\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = l^2\sin^2\vartheta\left(\frac{3}{2}gl(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta)+l^2\vartheta_0'^2\right)-f^2$$
$$+f^2\frac{l^2\sin^2\vartheta}{l^2\sin^2\vartheta_0},$$

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=(l^2-z^2)\left(\frac{3}{2}g(z_0-z)+l^2\vartheta_0'^2+\frac{f^2}{l^2\sin^2\vartheta_0}\right)-f^2,$$

und, da $f^2=(l^2\sin^2\vartheta_0\ \varphi_0')^2$, somit $\frac{f^2}{l_2\sin^2\vartheta_0}=l^2\sin^2\vartheta^0\ \varphi_0'^2$, und da $l^2\vartheta_0'^2+l^2\sin^2\vartheta_0\ \varphi_0'^2=v_0^2$, schliesslich:

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=(l^2-z^2)\left(v_0^2+\frac{3}{2}g(z_0-z)\right)-f^2.$$

Wir kehren zurück zu den Formeln (4*) und IV. Aus letzterer folgt dass $\left(\frac{dz}{dt}\right)=0$, wenn $Z=0$; also sind die Wurzeln der kubischen Gleichung $Z=0$ gleichzeitig Maxima und Minima von z. Ueber diese Wurzeln giebt am besten Auskunft die Gleichung

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\frac{3}{2}g\left\{(l^2-z^2)(z_1+z_0-z)-(l^2-z_0)^2z_3\right\}$$
$$=\frac{3}{2}g\ Z. \qquad (4^*).$$

Hier drängt sich die Frage auf ob wir für z auch negative Werthe zulassen wollen? z negativ bedeutet dass nach dem unabweislichen Auffallen der Geraden auf die xy Ebene jene ihre Bewegung unterhalb der letzteren fortsetzt. Theoretisch steht der Annahme Nichts im Wege dass die Gerade durch die xy Ebene hindurch gehe, nur muss Punkt A stets in der z Axe, Punkt B stets in der xy Ebene bleiben.

Der Vollständigkeit halber werde diese Bewegung unterhalb der xy Ebene zugelassen und betrachtet.

Aus (4*) folgt nun dass für

$z=$	$+\infty$	l	z_0	0	$-l$	$-\infty$
$Z=$	$+\infty$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-\infty$

wird, und zwar ergiebt sich die nicht ohne Weiteres er-

sichtliche dritte Beziehung daher dass $z_4 > z_5 > z_0$ ist, denn wir hatten substituirt:

$$v_0^2 = \frac{3g}{2} z_4; \quad f^2 = \frac{3g}{2}(l^2 - z_0^2) z_5,$$

aber auch $\frac{a^2+b^2+d^2}{4} = v_0^2$ und $\frac{b^2}{4}(l^2 - z_0^2) = f^2$,

somit ist

$$z_4 = \frac{a^2+b^2+d^2}{6g}; \quad z_5 = \frac{b^2}{6g}, \text{ also } z_4 > z_5,$$

Ferner wird $d^2 = 6g(z_4 - z_5)\frac{(l^2 - z_0^2)}{l^2}$,

Es hat daher Z eine positive Wurzel z_3 zwischen $+\infty$ und l, eine positive Wurzel z_1 zwischen l und z_0, und eine dritte, negative, z_2 zwischen 0 und $-l$.

Da aber für grössere Werthe von z als z_1, Z negativ wird, können solche Werthe $z > z_1$ im Laufe der Bewegung nicht eintreten; ebensowenig negative Werthe von z die absolut grösser als z_2 wären, denn diese letzteren würden wieder Z negativ machen.

Die reelle Bewegung der Geraden ist darum in ihren Grenzen durch z_1 und z_2 bestimmt.

Aus $Z = z^3 - z^2(z_4 + z_0) - z\,l^2 + l^2(z_4 + z_0) - (l^2 - z_0^2) z_5$
$= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ folgt weiter:

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_4 + z_0; \quad z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = -l^2;$$
$$z_1 z_2 z_3 = -l^2(z_4 + z_0) + (l^2 - z_0^2) z_5.$$
$$z_3 = -\frac{(l^2 + z_1 z_2)}{z_1 + z_2}.$$

$$(l^2 - z_0^2) z_5 - l^2(z_4 + z_0) - z_1 z_2 \left(\frac{l^2 + z_1 z_2}{z_1 + z_2} \right) = -\frac{(l^2 - z_1^2)(l^2 - z_2^2)}{z_1 + z_2}.$$

Die linken Seiten beider letzten Gleichungen sind positiv, somit auch die rechten, und, da $z_1 < l$ und $|z_2| < l$, folgt dass $(z_1 + z_2) < 0$ sein muss, woraus wir den wichtigen Schluss ziehen, dass die negative Grösse z_2 absolut grösser als z_1 ist, dass also die Gerade in ihrer Bewegung unterhalb der xy Ebene tiefer sinkt als sie je oberhalb derselben liegt.

Wir stellen zusammen:

$$z_3 > l;\ z_1 < l;\ z_2 \text{ negativ, und } l > [z_2] > z_1.$$

Bei negativem z_0 bleiben diese Betrachtungen im Wesentlichen dieselben. $z_0 = 0$ (oder $b = 0$, also wenn die Bewegung nur in der xz Ebene stattfindet) hat zur Folge: $z_1 = l;\ z_2 = -l;\ z_3 = l$.

Das Integral der Gleichung IV.

$$\int dt \frac{\sqrt{6g}}{2l} = \int \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \int \frac{dz}{\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}}$$

ist nun auf die Normalform zu bringen.

Setzen wir:

$$z = z_2 + (z_1 - z_2)w^2, \tag{7}$$

dann ist

$$dz = 2(z_1-z_2)w\ dw;\ \ (z-z_1) = (z_2-z_1) + (z_1-z_2)w^2;$$
$$(z-z_3) = (z_2-z_3) + (z_1-z_2)w^2$$

$$\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{2(z_1-z_2)w\ dw}{\sqrt{(z_1-z_2)(w^2-1)(z_1-z_2)w^2\}(z_2-z_3) + (z_1-z_2)w^2\}}}$$

$$= \frac{2dw}{\sqrt{(w^2-1)[z_2-z_3+(z_1-z_2)w^2]}}.$$

$$\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{2dw}{\sqrt{z_3-z_2}\ \sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} = \frac{2dw}{\sqrt{z_3-z_2}\ \sqrt{W}} \tag{8}$$

wo $k^2 = \dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_2} < 1$ ist.

Weiter ist $w = \sqrt{\dfrac{z-z_2}{z_1-z_2}}$, also stets reell und $\leqq 1$, ferner nimmt w mit z ab und zu. Wir haben noch $k'^2 = \dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2} < 1$. Für $z = z_0$ wird $w_0 = \sqrt{\dfrac{z_0-z_2}{z_1-z_2}}$, für $z = z$, wo $t = t$, w wie oben substituirt.

Integriren wir von $t = 0$ bis $t = t$, dann ergiebt sich:

$$\sqrt{z_3-z_2}\,\frac{\sqrt{6g}}{4l}t = \int_{w_0}^{w}\frac{dw}{\sqrt{W}} = u-u_0, \quad \text{wo } w = snu, \quad (9)$$
$$\text{und } w_0 = snu_0.$$

Sei $\sqrt{z_3-z_2}\,\frac{\sqrt{6g}}{4l} = L$, dann ist $Lt = u-u_0$. (10)

Aus (7) und (9) folgt

$$z = z_2+(z_1-z_2)sn^2u, \quad (11)$$

ferner ist $cnu = \sqrt{\frac{z_1-z}{z_1-z_2}}$; $dnu = \sqrt{\frac{z_3-z}{z_3-z_2}}$.

Substituiren wir diese Ausdrücke rückwärts in $\sqrt{Z}$, dann zeigt sich:

$$\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} = (z_1-z_2)\sqrt{z_3-z_2}\;snu\;cnu\;dnu,$$

und $dz = 2(z_1-z_2)\,snu\,cnu\,dnu\,du$; $\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{2}{\sqrt{z_3-z_2}}du.$

Gleichung (11) können wir schreiben:

$$z = z_1\,sn^2u+z_2\,cn^2u,$$

es ist also z eine periodische Funktion von u, und zwar

$z = z_1$ wenn $u = K, 3K, 5K \ldots\ldots$ und
$z = z_2$ wenn $u = 2K, 4K, 6K \ldots\ldots$

Aus (10): $Lt = u-u_0$ folgt dass u mit t beständig wächst.

Nennen wir T die Zeit die verflossen wenn $u = 2K$ geworden, dann gilt:

$$LT = 2K-u_0, \text{ somit } L = \frac{2K-u_0}{T}; \quad \frac{t(2K-u_0)}{T} = u-u_0$$
$$\text{und} \quad u = 2K+L(t-T);$$

damit ist

$$z = z_1sn^2(Lt+u_0)+z_2cn^2(Lt+u_0) = z_1sn^2[2K+L(t-T)]$$
$$+ z_2cn^2[2K+L(t-T)].$$

Somit, wie vorher gefunden, wird $z = z_2$ wenn t zu T geworden, ferner nimmt z stets wieder denselben Werth an, wenn die amplitude u um $2K$, also t um $\frac{2K}{L}$ gewachsen ist.

Ferner folgt aus:

$sn^2(\xi+2K) = sn^2(-\xi+2K)$; $cn^2(\xi+2K) = cn^2(-\xi+2K)$, dass auch

$$z = z_1 sn^2[2\nu K - L(t-T)] + z_2\, cn^2[2\nu K - L(t-T)],$$

d. h. z hat die gleichen Werthe zu Zeiten die von einem Amplituden-Werthe $2\nu K$ gleich weit vor- oder rückwärts liegen. Es steigt also der Punkt A oscillirend in der z Axe herab und wieder herauf.

Die Integration nach t ist nun über bestimmte Zeiträume auszudehnen. Da wir d positiv annahmen, steigt die Gerade vom Anfange der Bewegung an in die Höhe, z wächst von z_0 bis z_1, der erreichte Zeitpunkt sei t_1, sodann haben wir, da $w_1 = \sqrt{\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_2}} = 1$,

$$L t_1 = \int_{w_0}^{1} \frac{dw}{\sqrt{W}} = K - u_0.$$

Dieselbe Zeit gebraucht die Gerade um aus der durch z_1 bestimmten Höhe in die Anfangslage, wo $z = z_0$, zurück zu fallen, wie aus dem Prinzipe der lebendigen Kraft folgt, und die Zeit t_* in der sie die xy Ebene erreicht, ergiebt sich aus dem Integrale

$$\int_{w_0}^{\sqrt{\frac{-z_2}{z_1-z_2}}} -\frac{dw}{\sqrt{W}} = \int_{\sqrt{\frac{-z_2}{z_1-z_2}}}^{w_0} +\frac{dw}{\sqrt{W}} = u_0 - u_*.$$

In diesem Intervalle war dw negativ zu nehmen, da hier z abnimmt, während t beständig wächst.

Gesammte Zeit bis zu diesem Auffallen auf die xy Ebene ist somit:

$$\frac{1}{L}[2(K-u_0)+u_0-u_*] = \frac{2K-u_0-u_*}{L}.$$

Die Gerade bewegt sich des Weiteren unterhalb der xy Ebene bis z den Werth z_2 angenommen. Damit ist

$$L t_2 = \int_{\sqrt{\frac{-z_2}{z_1-z_2}}}^{w_2} - \frac{dw}{\sqrt{W}} = \int_0^{\sqrt{\frac{-z_2}{z_1-z_2}}} + \frac{dw}{\sqrt{W}} = u_*,$$

$$\text{da } w_2 = \sqrt{\frac{z_2-z_2}{z_1-z_2}} = 0,$$

und dieser Theil der Bewegung, vom Anfange an bis zum tiefsten Punkte, ist beendet in der Zeit

$$\frac{2K-u_0-u_*+u_*}{L} = \frac{2K-u_0}{L}.$$

Das Ansteigen der Geraden erfordert die gleichen Zeiträume, somit $\frac{K}{L}$ bis zum Erreichen von z_1, der Maximal-Höhe, wiederum $\frac{K}{L}$ bis zum wiederholten Minimum z_2, u.s.f.

Findet die Bewegung nur in der zx Ebene statt, so folgt aus (4*)

$\frac{3g}{2}Z = (l^2-z^2)(z_4+z_0-z)$, dass $z_1 = l$; $z_2 = -l$; $z_3 = l$.

Die Gerade fällt wieder nach der Zeit $\frac{2K-u_0-u_*}{L}$ auf die xy Ebene, doch haben die Grössen K, u, u_0, u_* hier andere Werthe als zuvor. Speziell ist $L = \sqrt{\frac{3g}{4l}}$. Ist keine Anfangsgeschwindigkeit vorhanden, somit $z_4 = 0$, dann wird $z_1 = z_0$; $z_2 = -l$; $z_3 = +l$. Die Gerade fällt sofort herunter, und erreicht die xy Ebene in der Zeit $T' = \frac{K-u_*}{L}$, wo hier

$$u_* = \int_0^{\sqrt{\frac{l}{z_0+l}}} \frac{dw}{\sqrt{W}} = F\left(\text{arc sin}\sqrt{\frac{l}{z_0+l}}\right).$$

Damit ist

$$T' = 2\sqrt{\frac{l}{3g}}\left[K - F\left(\arcsin\sqrt{\frac{l}{z_0+l}}\right)\right].$$

Man sieht dass für $z_0 = 0$, $T' = 0$ wird.

Nach weiterem Verlaufe von $\frac{F}{L}$, also in der Zeit $2\sqrt{\frac{l}{3g}}K$ nach Beginn der Bewegung, geht die Gerade durch die Verticale (siehe Figur 3), steigt dann im dritten Quadranten aufwärts, passirt die Horizontale bis sie weiter steigend im zweiten Quadranten ihrer Anfangslage symmetrisch gegenüber liegt, um von hier aus rückwärts in derselben Weise jene wieder aufzusuchen, und das Spiel unendlich fortzusetzen. Der Schwerpunkt S bleibt dabei auf einem mit dem Radius l um 0 beschriebenen Kreise. Dass der Uebergang aus dem vierten in den dritten Quadranten stattfindet, und die Rückwärtsbewegung der Geraden nicht schon nach Erreichen der Verticale beginnt, weisen wir nach indem wir zeigen dass, wenn $z = z_2 = -l$, somit $x = 0$, $\frac{dx}{dt}$ nicht Null ist.

Wegen $x^2 = l^2 - z^2$ ist $\frac{dx}{dt} = -z\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{l^2-z^2}}$, und da

$$\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{\frac{3g}{2l^2}}\sqrt{(l^2-z^2)(z_1+z_0-z)} = \pm\sqrt{\frac{3g}{2l^2}}\sqrt{(l^2-z^2)(z_0-z)}$$

ist hier $\frac{dx}{dt} = +\left(z\sqrt{\frac{3g}{2l^2}}\sqrt{z_0-z}\right)_{z=-l} = -\sqrt{\frac{3g}{2}}\sqrt{z_0+l}$

Dieser Werth ist verschieden von Null, er müsste aber Null sein, wenn x hier vom Abnehmen zum Wachsen übergehen sollte.

Wir wenden uns nun zur Berechnung des Winkels φ.

Es war $d\varphi = \frac{b\sqrt{l^2-z_0^2}}{2(l^2-z^2)}dt$, und da $dt = \frac{4l}{\sqrt{6g}\sqrt{z_3-z_2}\sqrt{W}}\frac{dw}{2}$,

$$d\varphi = \frac{2lb}{\sqrt{6g}} \frac{\sqrt{l^2-z_0^2}}{\sqrt{z_3-z_2}} \frac{1}{l^2-z^2} \frac{dw}{\sqrt{W}}; \text{ weiter, da}$$

$$\frac{1}{l^2-z^2} = \frac{1}{2l}\left(\frac{1}{l-z}+\frac{1}{l+z}\right); \quad l-z = l-z_2-(z_1-z_2)w^2;$$
$$l+z = l+z_2+(z_1-z_2)w^2,$$

$$\text{wird } d\varphi = \frac{b}{\sqrt{6g}}\sqrt{\frac{l^2-z_0^2}{z_3-z_2}}\left\{\frac{1}{l-z_2}\frac{dw}{(1-\frac{z_1-z_2}{l-z_2}w^2)\sqrt{W}}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{l+z_2}\frac{dw}{(1+\frac{z_1-z_2}{l+z_2}w^2)\sqrt{W}}\right\}.$$

Es ist dann $\varphi = 0$ wenn $z = z_0$, somit $w_0 = \sqrt{\frac{z_0-z_2}{z_1-z_2}}$ wie zuvor, ferner $\varphi = \varphi_1$ wenn $z = z_1$, wo $w_1 = 1$; $\varphi = \varphi$ wenn $z = z$ und $\varphi = \varphi_0$ wenn $z = 0$.

Da w stets ≤ 1, setzen wir $w = \sin \Psi$, und haben, wenn A und B die vor den Differentialen stehenden Constanten bezeichnen,

$$d\varphi = A\frac{dw}{(1-\frac{z_1-z_2}{l-z_2}w^2)\sqrt{W}} + B\frac{dw}{(1+\frac{z_1-z_2}{l+z_2}w^2)\sqrt{W}}$$

und

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \varphi = A\int_{w_0}^{w} \frac{dw}{(1+n\sin^2\Psi)\Delta\Psi}$$
$$+ B\int_{w_0}^{w} \frac{dw}{(1+n'\sin^2\Psi)\Delta\Psi},$$

wo $w = snu = \sin\Psi$; $\Psi = \text{am } u$ und

$$n = -\frac{z_1-z_2}{l-z_2}, \quad \frac{z_1-z_2}{l+z_2} = n'$$

gesetzt worden.

Da n zwischen $-k^2$ und -1 liegt, n' zwischen ∞ und 0, substituiren wir weiter:

$$n = -k^2\, sn^2\alpha, \text{ womit, da } k^2 = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2},$$

$$sn^2\alpha = \frac{z_3 - z_2}{l - z_2} > 1 \text{ wird;}$$

ferner $n' = -k^2 sn^2\beta$, womit $sn^2\beta = -\dfrac{z_3 - z_2}{l + z_2} < 0$ wird.

Damit liegt $sn\alpha$ zwischen 1 und $\dfrac{1}{k}$ wie eine leichte Rechnung zeigt, folglich α selbst zwischen K und $K + iK'$, und setzen wir daher $\alpha = ia + K$.

n' ist ein positiver Bruch, und, da $sn\beta = i\sqrt{\dfrac{z_3 - z_2}{l + z_2}}$ d. h. gleich i mal einer positiven Grösse die > 1, setzen wir

$$\beta = ip.$$

Hiernach werden unsere Integrale dritter Gattung solche à paramètre circulaire, und es ergiebt sich:

$$\varphi = A \left\{ \int_0^w \frac{d\Psi}{(1 - k^2 sn^2[ia + K] \sin^2\Psi)\Delta\Psi} - \int_0^{w_0} \frac{d\Psi}{(1 - k^2 sn^2[ia + K] \sin^2\Psi)\Delta\Psi} \right\}$$

$$+ B \left\{ \int_0^w \frac{d\Psi}{(1 - k^2 sn^2 ip \sin^2\Psi)\Delta\Psi} - \int_0^{w_0} \frac{d\Psi}{(1 - k^2 sn^2 ip \sin^2\Psi)\Delta\Psi} \right\}$$

$$= A \{ \Pi_1(\Psi_1, n) - \Pi_1(\Psi_0, n) \} + B \{ \Pi_1(\Psi, n') - \Pi_1(\Psi_0, n') \}$$

in Legendrescher Bezeichnung.

Nun ist, um zu den Jacobischen Formen überzugehen,

$$\Pi_1(\Psi_1\ n) = u + \frac{tn\alpha}{dn\alpha}\Pi(u, \alpha),$$

somit

$$\varphi = A\{u-u_0+\frac{tn\alpha}{dn\alpha}[\Pi(u_1,\alpha)-\Pi(u_0,\alpha)]\}$$
$$+B\{u-u_0+\frac{tn\beta}{dn\beta}[\Pi(u,\beta)-\Pi(u_0,\beta)]\}$$

und, da

$$\frac{tn\alpha}{dn\alpha}=\frac{tn(ia+K)}{dn(ia+K)}=\frac{i\,dn(ak')}{k'^2\,sn(ak')\,cn(ak')}$$
$$\frac{tn\beta}{dn\beta}=\frac{tn\,ip}{dn\,ip}=\frac{i\,sn(pk')\,cn(pk')}{dn(pk')},$$

$$\varphi = A\{u-u_0+\frac{dn\,ak'}{k'^2\,sn\,ak'\,cn\,ak'}[i\,\Pi(u,ia+K)-i\,\Pi(u_0,ia+K)]\}$$
$$+B\{u-u^0+\frac{sn\,pk'\,cn\,pk'}{dn\,pk'}[i\,\Pi(u,ip)-i\,\Pi(u_0,ip)]\}$$

Weiter ist

$$i\,\Pi(u,ia+K)=u\left\{Z(ak')+\frac{\pi a}{2KK'}-k'^2\frac{sn\,ak'\,cn\,ak'}{dn\,ak'}\right\}$$
$$+\frac{i}{2}lg\frac{\vartheta(u-K-ia)}{\vartheta(u+K+ia)}.$$

$$i\,\Pi(u,ip)=u\left\{Z(pk')+\frac{\pi p}{2KK'}-tn\,pk'\,dn\,pk'\right\}+\frac{i}{2}lg\frac{\vartheta(u-ip)}{\vartheta(u+ip)}.$$

Setzen wir diese Werthe ein, dann ergiebt sich:

$$\varphi =$$
$$(A+B)(u-u)+\frac{A\,dn(ak')}{k'^2\,sn\,ak'\,cn\,ak'}\left\{(u-u_0)\left[Z(ak')+\frac{\pi a}{2KK'}\right.\right.$$
$$\left.\left.-k'^2\frac{sn\,ak'\,cn\,ak'}{dn\,ak'}\right]+\frac{i}{2}lg\frac{\vartheta(u-K-ia)}{\vartheta(u+K+ia)}\frac{\vartheta(u_0+K+ia)}{\vartheta(u_0-K-ia)}\right\}$$
$$+B\frac{sn\,pk'\,cn\,pk'}{dn\,pk'}\left\{(u-u_0)[Zpk')+\frac{\pi p}{2KK'}-tn\,pk'\,dn\,pk']\right.$$
$$\left.+\frac{i}{2}lg\frac{\vartheta(u-ip)}{\vartheta(u+ip)}\frac{\vartheta(u_0+ip)}{\vartheta(u_0-ip)}\right\}.$$

Es lassen sich nun $sn(ak')$, $cn(ak')$, $dn(ak')$, $sn(pk')$, $cn(pk')$, $dn(pk')$ durch bekannte Grössen ausdrücken, und zwar findet sich:

$$sn(ak') = \sqrt{\frac{z_3 - l}{z_3 - z_1}}; \quad cn(ak') = \sqrt{\frac{l - z_1}{z_3 - z_1}};$$

$$dn(ak') = \sqrt{\frac{l - z_2}{z_3 - z_2}}; \quad sn(pk') = \sqrt{\frac{z_3 - z_2}{l + z_3}};$$

$$cn(pk') = \sqrt{\frac{l + z_2}{l + z_3}}; \quad dn(pk') = \sqrt{\frac{l + z_1}{l + z_3}};$$

alle diese 6 Grössen sind reell. Weiter ist:

$$\frac{A\,dn(ak')}{k'^2\,sn(ak')\,cn(ak')} = \frac{b}{\sqrt{6g}}\sqrt{\frac{l^2 - z_0^2}{(l - z_1)(l - z_2)(z_3 - l)}}$$

$$\frac{B\,sn(pk')\,cn(pk')}{dn(pk')} = \frac{b}{\sqrt{6g}}\sqrt{\frac{l^2 - z_0^2}{(l + z_1)(l + z_2)(l + z_3)}}$$

$$B\,cn^2(pk') = \frac{b}{\sqrt{6g}}\frac{\sqrt{l^2 - z_0^2}}{l + z_3}.$$

Setzen wir diese Werthe ein, dann ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}\varphi = \frac{b\sqrt{l^2 - z_0^2}}{\sqrt{6g}}\Bigg\{ (u - u_0)\Bigg[&\frac{1}{l + z_3}\frac{1}{\sqrt{z_3 - z_2}} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{(l - z_1)(l - z_2)(z_3 - l)}}\left(Z(ak') + \frac{\pi a}{2KK'}\right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{(l + z_1)(l + z_2)(l + z_3)}}\left(Z(pk') + \frac{\pi p}{2KK'}\right)\Bigg] \\ + \frac{1}{\sqrt{(l - z_1)(l - z_2)(z_3 - l)}}\frac{i}{2}\,lg\,&\frac{\vartheta(u - K - ia)\,\vartheta(u_0 + K + ia)}{\vartheta(u + K + ia)\,\vartheta(u_0 - K - ia)} \\ + \frac{1}{\sqrt{(l + z_1)(l + z_2)(l + z_3)}}\frac{i}{2}\,lg\,&\frac{\vartheta(u - ip)\,\vartheta(u_0 + ip)}{\vartheta(u + ip)\,\vartheta(u_0 - ip)}\Bigg\}.\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Dieser Ausdruck ist noch wesentlich zu vereinfachen:

Da $l + z_3 = l - \frac{l^2 + z_1 z_2}{z_1 + z_2} = -\frac{(l - z_1)(l - z_2)}{z_1 + z_2}$ und ebenso $z_3 - l = -\frac{(l + z_1)(l + z_2)}{z_1 + z_2}$ ist $(l - z_1)(l - z_2)(z_3 - l) = -\frac{(l^2 - z_1^2)(l^2 - z_2^2)}{z_1 + z_2} = (l + z_1)(l + z_2)(l + z_3)$.

Ferner, da $b = \sqrt{6gz_5} = \sqrt{6g}\sqrt{\frac{(l^2-z_1^2)(l^2-z_2^2)}{(z_1+z_2)(l^2-z_0^2)}}$,

wird

$$\frac{b\sqrt{l^2-z_0^2}}{\sqrt{6g}\sqrt{(l-z_1)(l-z_2)(z_3-l)}} = \frac{b\sqrt{l^2-z_0^2}}{\sqrt{6g}\sqrt{(l+z_1)(l+z_2)(l+z_3)}} = 1$$

und

$$\frac{b\sqrt{l^2-z_0^2}}{\sqrt{6g}\sqrt{z_3-z_2}\,(l+z_3)} = \frac{(z_1+z_2)}{\sqrt{l^2+2z_1z_2+z_2^2}}\sqrt{\frac{(l+z_1)(l+z_2)}{(l-z_1)(l-z_2)}}.$$

Der letzte Ausdruck wird nicht unendlich für $l = z_1$ oder $l = z_2$ denn $\frac{(l+z_1)(l+z_2)}{(l-z_1)(l-z_2)} = \frac{z_3-l}{l+z_3}$; auch ist $(l^2+2z_1z_2+z_2^2)$ stets positiv, die Wurzel bleibt also reell, dies weil

$z_1^2 \pm 2z_1z_2+z_2^2 > 0$ und umsomehr $l^2 \pm 2z_1z_2+z_2^2 > 0$.

Hiermit nimmt Gleichung (12) die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}\varphi = (u-u_0)\,&\frac{-(z_1+z_2)}{\sqrt{l^2+2z_1z_2+z_2^2}}\sqrt{\frac{(l+z_1)(l+z_2)}{(l-z_1)(l-z_2)}}\\ &+ Z(ak') + Z(pk') + \frac{\pi(a+p)}{2KK'}\Big)\\ +\ \frac{i}{2}\log&\frac{\vartheta(u-K-ia)\,\vartheta(u_0+K+ia)}{\vartheta(u+K+ia)\,\vartheta(u_0-K-ia)}\;\frac{\vartheta(u-ip)\,\vartheta(u_0+ip)}{\vartheta(u+ip)\,\vartheta(u_0-ip)}.\end{aligned}\right\}(13)$$

Dieser logarithmische ϑ-Quotient ist reell!

Die weitere Untersuchung vereinfacht sich bedeutend, wenn wir, wie meistens üblich, die Zeit vom ersten Erreichen des höchsten Punktes an zählen, also wenn $z = z_1$ geworden, und die fallende Bewegung der Geraden beginnt. Es ist dann u_0 überall $= u_1 = K$ anzunehmen.

Uebrigens erreichen wir dasselbe, wenn wir sofort $d = 0$, aber damit $z_0 = z_1$ setzen, d. h. die Bewegung der Geraden im höchsten Punkte ihren Anfang nehmen lassen, und ihr keine vertikale, sondern nur eine seitliche Anfangsgeschwin-

digkeit ertheilen, womit dann $z_4 = z_5 = z_2 + z_3$; $v_0^2 = \frac{3g}{2}(z_2+z_3)$ wird, und sich für z_2 und z_3 einfachere Ausdrücke ergeben.

Wir erhalten damit aus (10)

$$Lt = u - K; \quad LT = K; \quad L = \frac{K}{T}; \quad u = K + \frac{Kt}{T}$$

$$z = z_1\, sn^2\left(K + \frac{Kt}{T}\right) + z_2\, cn^2\left(K + \frac{Kt}{T}\right).$$

Für $t = 0$ wird wieder $z = z_1$, für $t = T$ wird $z = z_2$, z ist Null wenn $z_1\, sn^2\left(K + \frac{Kt_*}{T}\right) = -z_2\, cn^2\left(K + \frac{Kt_*}{T}\right)$ wo t_* dadurch bestimmt ist dass $sn\left(K + \frac{Kt_*}{T}\right) = \sqrt{\frac{-z_2}{z_1 - z_2}}$.

Nach Verlauf der Zeit $2T$ nimmt z stets wieder denselben Werth an, ferner sieht man da

$$z = z_1\, sn^2\left(\mu K + \frac{Kt}{T}\right) + z_2\, cn^2\left(\mu K + \frac{Kt}{T}\right)$$
$$= z_1\, sn^2\left(\mu K - \frac{Kt}{T}\right) + z_2\, cn^2\left(\mu K - \frac{Kt}{T}\right),$$

wo μ eine beliebige ganze ungerade Zahl, dass z während t um T wächst, vom höchsten oder tiefsten Punkte an ebenso zu- oder abnimmt wie es vorher ab- oder zugenommen.

Zusammengehörige Werthe sind demnach:

$z = z_1$;	$u = K$;	$t = 0$.
$z = 0$;	$u = K + \frac{Kt_*}{T}$;	$t = t_*$.
$z = z_2$;	$u = 2K$;	$t = T$.
$z = 0$	$u = 3K - \frac{Kt_*}{T}$;	$t = 2T - t_*$.
$z = z_1$;	$u = 3K$;	$t = 2T$.
$z = 0$;	$u = 3K + \frac{Kt_*}{T}$;	$t = 2T + t_*$.
$z = z_2$;	$u = 4K$;	$t = 3T$ etc.

Für $u = \frac{3K}{2}, \frac{5K\ldots}{2}$ wo $t = \frac{T}{2}, \frac{3T\ldots}{2}$ hat z stets den gleichen Werth

$$z = \frac{z_1 + z_2 k'}{1 + k'} = \frac{z_2\sqrt{z_3 - z_1} + z_1\sqrt{z_3 - z_2}}{\sqrt{z_3 - z_1} + \sqrt{z_3 - z_2}}.$$

Aus (13) folgt, wenn wir $u_0 = K$ setzen, so dass $u - u_0 = \frac{Kt}{T}$,

$$\varphi = \frac{Kt}{T}\left\{\frac{-(z_1 + z_2)}{\sqrt{l^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2}}\sqrt{\frac{(l + z_1)(l + z_2)}{l - z_1(l - z_2)}} + Z(ak') + Z(pk') + \frac{\pi(a+p)}{2KK'}\right\} + \frac{i}{2} lg \frac{\vartheta(u - K - ia)\,\vartheta(u - ip)}{\vartheta(u + K + ia)\,\vartheta(u + ip)}. \quad (14)$$

Hier ist der mit $\frac{Kt}{T}$ multiplizirte Faktor constant, der erste Theil von φ somit proportional der Zeit, der logarithmische zweite Theil verschwindet für $u = K, 2K, rK$ und nimmt stets denselben Werth an für $u' = u + 2rK$, wo r eine beliebige ganze Zahl. Derselbe beschleunigt das durch den ersten Theil hervorgerufene constante Anwachsen von φ in complicirter, von u abhängiger Weise. Für den Anfang der Bewegung ist natürlich $\varphi = 0$.

Zusammengehörige Werthe sind hier:

$u = K;\quad t = T;\quad \varphi = \Phi$
$u = 2K;\quad t = 2T;\quad \varphi = 2\Phi$
$u = 3K;\quad t = 3T;\quad \varphi = 3\Phi$
$u = rK;\quad t = rT;\quad \varphi = r\Phi$

wo N der Ausdruck in z aus (14) und

$$\Phi = K\left(N + Z(ak') + Z(pk') + \frac{\pi(a+p)}{2KK'}\right). \quad (15)$$

Also wächst beim Fall der schweren Geraden von z_1 bis z_2 der Winkel φ von 0 bis Φ, beim Ansteigen weiter bis 2Φ, u. s. f.

Von diesem Winkel Φ kann durch ein Näherungsverfahren, und auch auf andere Weise gezeigt werden dass er grösser als $\pi/2$.

Wegen (15) können wir Gleichung (14) auch schreiben:

$$\varphi = \frac{t}{T}\Phi + \frac{i}{2} lg \frac{\vartheta(u-K-ia)\,\vartheta(u-ip)}{\vartheta(u+K+ia)\,\vartheta(u+ip)}.$$

Mit der Kenntniss der periodischen Werthe der z Coordinate, und des Gesetzes des Anwachsens des Winkels φ, ist die Gesammtbewegung der Geraden gegeben. Wir gehen über zur Betrachtung der Geschwindigkeiten ihrer Hauptpunkte A, S und B. Die verticale Geschwindigkeit des Punktes A ist $2\frac{dz}{dt}$.

Sie ergiebt sich aus der Gleichung (4*)

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{2}\{(l^2-z^2)(z_4+z_0-z) - (l^2-z_0^2)z_5\};$$

sie wird Null für $z = z_4$ und $z = z_2$, hat also irgend wo zwischen diesen Punkten ihren absolut grössten Werth. Zuvörderst wächst sie absolut mit abnehmendem z bis z gleich Null geworden, und auch darüber hinaus, da bei nunmehr negativem z die Differenz

$$(l^2-z^2)(z_4+z_0-z) - l^2(z_4+z_0) = -l^2z - z^2(z_4+z_0-z)$$

einen positiven Werth hat, dies weil (Division mit der positiven Grösse $-z$)

$$(l^2+z(z_4+z_0-z) = l^2+z(z_1+z_2+z_3-z) > 0$$

ist, so lange z einen gewissen Werth nicht übersteigt.

Der auf die z Axe gezwungene Punkt A hat also sein Geschwindigkeits-Maximum unterhalb der xy Ebene.

Dieses Maximum ergiebt sich durch Nullsetzen des Differentialquotienten der rechten Seite obiger Gleichung.

Es zeigt sich: $3z^2 - 2z(z_4+z_0) - l^2 = 0$.

$$z = \frac{z_4+z_0 \pm \sqrt{(z_4+z_0)^2+3l^2}}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3) \pm \sqrt{(z_1+z_2+z_3)^2+3l^2}$$

wo nach dem eben Erläuterten der Wurzel das negative Zeichen beizulegen.

Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes S finden wir aus

$$v^2 = v_0^2 + \frac{3g}{2}(z_0 - z) = \frac{3g}{2}(z_4 + z_0 - z) = \frac{3g}{2}(z_1 + z_2 + z_3 - z),$$

v ist am grössten für $z = z_2$, am kleinsten für $z = z_1$; bei irgend einer Anfangsgeschwindigkeit wird v nie Null, und $(z_1 + z_2 + z_3 - z)$ ist stets eine positive Grösse.

Es folgt dass auch die horizontale Geschwindigkeit des Punktes B nie verschwinden kann.

Die Kraft λ die den Schwerpunkt S auf die Kugel (Radius l) zwingt, ergiebt sich aus den Anfangsgleichungen III zu:

$$\lambda = \frac{v^2 - {}^3/_4 gz}{l} = \frac{3g}{4l}[2(z_1 + z_2 + z_3) - 3z].$$

Diese Kraft kann ihr Vorzeichen wechseln, und die schwere Gerade würde von der zAxe abfliegen, wenn Punkt A nicht auf diese geheftet wäre. Der Fall tritt ein wenn $2(z_1 + z_2 + z_3) - 3z$ für $z = z_1$ negativ ist: die Differenz wird dann mit abnehmendem z positiv werden.

Ist keine Anfangsgeschwindigkeit vorhanden, dann liegt dieser Fall vor, denn da hier $z_1 = z_0$; $z_2 = -l$; $z_3 = l$, wird $2z_1 - 3z$ im Punkte $z = {}^2/_3 z_0$ zu Null, und hier springt die Gerade von der zAxe ab, wenn ihr oberer Endpunkt nicht auf selber haftet. Dies Phänomen können wir an Stangen, die an einer Wand lehnend herunterfallen, während ihr anderes Ende auf dem Boden gleitet, sehr oft wahrnehmen.

In unserem theoretischen Falle verhindert eine grosse Anfangsgeschwindigkeit den Zeichenwechsel von λ, denn wenn $v_0^2 = \frac{3g}{2} z_4$ sehr gross, wird $z_4 + z_0 = z_1 + z_2 + z_3$ sehr gross werden, d. h. z_3 sehr gross, da $z_1 > l$ und $[z_2] < l$, somit $2(z_1 + z_2 + z_3) - 3z$ positiv sein, da z nur $\leq z_1$ sein kann.

V, die horizontale Geschwindigkeit des Punktes B, ergiebt sich aus:

$$\left.\begin{aligned} V^2 = 4\left[v^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] &= 4\left\{v_0^2 + \frac{3g}{2}(z_0 - z)\right. \\ &\quad \left. - \frac{3g}{2}\left[\frac{l^2 - z^2}{l^2}(z_4 + z_0 - z) - \frac{(l^2 - z_0^2)}{l^2} z_5\right]\right\} \\ &= \frac{6g}{l^2} z^2 (z_4 + z_0 - z) + \frac{4f^2}{l^2} \\ = \frac{6g}{l^2}\left\{\frac{z^2(z_1+z_2)(z_1+z_2+z_3-z) - (l^2 - z_1^2)(l^2 - z_2^2)}{z_1 + z_2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

V^2 wird nie Null, ist stets am kleinsten wenn $z = 0$, und zwar hier gleich

$$\frac{4f^2}{l^2} = \frac{(l^2 - z_0^2)b^2}{l^2} = -\frac{6g(l^2 - z_1^2)(l^2 - z_2^2)}{l^2(z_1 + z_2}},$$

und, wie in gewöhnlicher Weise folgt, am grössten wenn $z = {}^2/_3(z_1 + z_2 + z_3)$, was mit dem eben Erörterten übereinstimmt. V wächst so lange $2(z_1 + z_2 + z_3) < 3z$ ist, und nimmt nachher wieder ab.

Sei $0B = 2\varrho$, dann ist $\varrho^2 = l^2 - z^2$. Dieser Halbmesser 2ϱ schwankt periodisch zwischen den Grössen $2l$ und $2\sqrt{l^2 - z_2^2}$, und nimmt alle dazwischen liegenden Werthe an.

Die Bahn des Punktes B ist also von 2 concentrischen Kreisen eingeschlossen, deren Radien $2l$ und $2\sqrt{l^2 - z_2^2}$. Da aber ϱ beim Ansteigen der Geraden von der xy Ebene aufwärts abnimmt bis $\varrho = \sqrt{l^2 - z_1^2}$ geworden, um von hier an beim Zurückfallen der Geraden wieder zu wachsen bis $\varrho = l$, wird die Bahn noch einen dritten concentrischen Kreis berühren, dessen Radius $2\sqrt{l^2 - z_1^2}$, und zwar stets nach Berührung des äussersten Kreises.

Figur (4) zeigt die Curve die Punkt B beschreibt.

Die Bewegung beginnt im Punkte 1 auf dem Kreise $2\sqrt{l^2 - z_1^2}$ und schreitet mit den Pfeilen fort.

Das Nullsetzen des Differentialquotienten $\frac{dQ}{dz}$ bestätigt die Resultate vorstehender Ueberlegung.

Eine Gleichung zwischen den x und y Coordinaten dieser Curve abzuleiten erlauben die bisher erzielten Resultate nicht.

Aus den Relationen III, in die wir den für λ gefundenen Werth einführen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3g}{4l}\Big(2(z_1+z_2+z_3)-3z\Big)x = 0;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{3g}{4l}\Big(2(z_1+z_2+z_3)-3z\Big)y = 0;$$

und die wir kürzer schreiben:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (rz-m)x; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = (rz-m)y,$$

folgt nur:

$$2\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + 2\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} = (rz-m)\left(2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= (r\sqrt{l^2-x^2-y^2}-m)\left(2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}\right)$$

und durch Integration:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = V^2 = -m(x^2+y^2) - \tfrac{2}{3}r(l^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{2r}{3}z^3 - m(l^2-z^2) + C,$$

welche Gleichung genau mit (16) übereinstimmt, also nichts Neues lehrt.

Dagegen lässt sich der von B beschriebene Bogen in einem Integral darstellen. Aus

$V = \frac{dS}{dt} = \sqrt{\frac{6g}{l}}\sqrt{z^2(z_1+z_0-z) + (l^2-z_0^2)z_0}$ folgt, wenn wir einsetzen $dt = \frac{2l}{\sqrt{6g}} \frac{dz}{\sqrt{(l^2-z^2)(z_1+z_0-z) - (l^2-z_0^2)z_0}}$

$$S = 2\int dz \sqrt{\frac{z^2(z_1+z_0-z)+(l^2-z_0^2)z_5}{(l^2-z^2)(z_4+z_0-z)-(l^2-z_0^2)z_5}}$$

$$= 2\int dz \sqrt{\frac{z^2(z_1+z_2)(z_1+z_2+z_3-z)-(l^2-z_1^2)(l^2-z_2^2)}{(l^2-z^2)(z_1+z_2)(z_1+z_2+z_3-z)+(l^2-z_1^2)(l^2-z_2^2)}}$$

Setzen wir ferner

$$V^2 = \varrho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = \frac{f^2}{\varrho^2} + \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2,$$

dann ist wegen

$$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = C - \frac{f^2}{\varrho^2} - m(l^2-z^2) - \frac{2r}{3}z^3$$

$$= C - \frac{f^2}{\varrho^2} - m\varrho^2 - \frac{2r}{3}(l^2-\varrho^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$dt = \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{C\varrho^2 - f^2 - m\varrho^4 - \frac{2r}{3}\varrho^2(l^2-\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}}.$$

Der Bogen s den der Schwerpunkt S beschreibt, ergiebt sich aus

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v_0^2 + \frac{3g}{2}(z_0-z) = \frac{3g}{2}(z_4+z_0-z)$$

$$= \frac{3g}{2}(z_1+z_2+z_3-z).$$

Danach ist:

$$ds = \sqrt{\frac{3g}{2}(z_1+z_2+z_3-z)}\,dt = \sqrt{\frac{3g}{2}(z_1+z_2+z_3-z)}\,\frac{2l}{\sqrt{6g}}\,\frac{dz}{\sqrt{Z}}$$

$$ds = \frac{l\sqrt{z_1+z_2+z_3-z}\,dz}{\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}};$$

$$s = \int \frac{l(z_6-z)\,dz}{\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_6)}} = \int \frac{l(z_6-z)\,dz}{\sqrt{Z'}}$$

wenn $z_1+z_2+z_3 = z_6$ gesetzt wird.

Dieses Integral ist leicht auf die elliptischen Normalformen zurückzuführen. Zuvörderst giebt $\int \frac{l\,z_6}{\sqrt{Z'}}$ ein solches erster Art, bei dem, wie bei den ferneren, der Modul nur verschieden von dem der zuvor aufgetretenen Integrale sein wird. Setzen wir ferner in $\frac{-z\,dz}{\sqrt{Z'}}$, $z = \frac{p+qt}{1+t}$, dann geht das Differential über in:

$$\frac{\frac{(p+qt)}{1+t}(q-p)\,dt}{\alpha\sqrt{(t^2+\lambda)(t^2+\mu)}} = F(t)\,dt$$

wo α, λ, μ Constanten, die sich aus p, q und den 4 Wurzeln z_1, z_2, z_3, z_6 bestimmen.

Multipliziren wir Zähler und Nenner von $F(t)$ mit $(1-t)$ dann ist

$$F(t)\,dt =$$

$$\frac{q-p}{\alpha}\left\{\frac{p\,dt}{(1-t^2)\sqrt{P(t)}} + \frac{t(q-p)\,dt}{(1-t^2)\sqrt{P(t)}} - \frac{qt^2\,dt}{(1-t^2)\sqrt{P(t)}}\right\}.$$

Hier giebt der 1. Summand elliptische Integrale 3. Art; den 2. wandeln wir durch die Substitution $t^2 = s$ in ein gewöhnliches Integral um, der 3. zerfällt in Integrale erster und dritter Art. Wegen der Umständlichkeit dieser Methode werde hier eine praktischere benutzt.

Es ist $ds = \sqrt{\frac{3g}{2}}\sqrt{z_1+z_2+z_3-z}\;\frac{2l}{\sqrt{6g}}\;\frac{dz}{\sqrt{Z}}$

$$= l\sqrt{z_1+z_2+z_3-z}\;\frac{2du}{\sqrt{z_3-z_2}}.$$

Hier eingeführt $z = z_2+(z_1-z_2)\,sn^2u$ giebt:

$$ds = \frac{2l}{\sqrt{z_3-z_2}}\sqrt{(z_1+z_3)-(z_1-z_2)\,sn^2u}\;du$$

$$= 2l\sqrt{\frac{z_1+z_3}{z_3-z_2}}\sqrt{1-\frac{z_1-z_2}{z_1+z_3}\,sn^2u}\;du$$

oder da $k^2 = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$, und wenn $\frac{z_1 + z_3}{z_3 - z_2} = h^2$,

$$ds = 2lh\sqrt{1 - \frac{k^2}{h^2} sn^2 u}\, du.$$

Sei wieder $snu = \sin \Psi$, also $du = \frac{d\Psi}{\Delta\Psi}$, dann ist

$$ds = 2lh\sqrt{\frac{1 - \frac{k^2}{h^2}\sin^2 \Psi}{1 - k^2 \sin^2 \Psi}}\, d\Psi. \qquad (17)$$

Wir setzen weiter

$$tg\, \Psi = \alpha\, tn(v, k_1) \qquad (18)$$

indem wir sowohl α, als den neuen Modul k_1 vorläufig unbestimmt lassen. Dann ist:

$$\sin^2 \Psi = \frac{\alpha^2 sn^2(v, k_1)}{1 - sn^2(v, k_1)(1 - \alpha^2)}; \quad \cos^2 \Psi = \frac{1 - sn^2(v, k_1)}{1 - sn^2(v, k_1)(1 - \alpha^2)},$$

und (Differentiation von (18)), $d\Psi = \cos^2 \Psi \frac{\alpha\, dn(v, k_1)\, dv}{cn^2(v, k_1)}$,

ferner $dn(v, k_1) = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \sin^2 \Psi (1 - \alpha^2 - k_1^2)}{\alpha^2 + \sin^2 \Psi (1 - \alpha^2)}}$;

$$cn^2(v, k_1) = \frac{\alpha^2 (1 - \sin^2 \Psi)}{\alpha^2 + \sin^2 \Psi (1 - \alpha^2)},$$

Setzen wir all diese Werthe in (17) ein, dann wird:

$$\sqrt{\frac{1 - \frac{k^2}{h^2}\sin^2 \Psi}{1 - k^2 \sin^2 \Psi}}\, d\Psi = \sqrt{\frac{1 - \frac{k^2}{h^2}\sin^2 \Psi}{1 - k^2 \sin^2 \Psi}} \cos^2 \Psi \frac{\alpha\, dn(v, k_1)\, dv}{cn^2(v, k_1)}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{k^2}{h^2}\sin^2 \Psi}{1 - k^2 \sin^2 \Psi}} \cos^2 \Psi\, \alpha \sqrt{\frac{\alpha^2 + \sin^2 \Psi (1 - \alpha^2 - k_1^2)}{\alpha^2 + \sin^2 \Psi (1 - \alpha^2)}}$$

$$\times \frac{\alpha^2 + \sin^2 \Psi (1 - \alpha^2)}{\alpha^2 (1 - \sin^2 \Psi)}\, dv.$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{1-\frac{k^2}{h^2}\sin^2\Psi}{1-k^2\sin^2\Psi}}\,d\Psi \\ = \alpha\sqrt{\frac{1-\frac{k^2}{h^2}\sin^2\Psi}{1-k^2\sin^2\Psi}}\,\sqrt{1+\sin^2\Psi\frac{(k_1'^2-\alpha^2)}{\alpha^2}} \\ \times\sqrt{1+\sin^2\Psi\frac{(1-\alpha^2)}{\alpha^2}}\,dv.\end{aligned}\right\}(19)$$

Hier können wir auf der rechten Seite die beiden Grössen α und k_1' resp. k_1 willkürlich bestimmen, womit dann $sn(vk_1)$ endgültig gefunden ist. Somit setzen wir:

$$\frac{\alpha^2-k_1'^2}{\alpha^2} = k^2, \text{ womit } \alpha = \frac{k_1'}{k'}, \text{ und}$$

$$\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2} = \frac{k^2}{h^2} = 1-\frac{k'^2}{k_1'^2}, \text{ womit } k_1'^2 = \frac{h^2k'^2}{h^2-k^2};$$

$$k_1^2 = \frac{h^2k^2-k^2}{h^2-k^2} \text{ wird.}$$

Unsere Transformation bringt demnach das Resultat:

$$\sqrt{\frac{1-\frac{k^2}{h^2}\sin^2\Psi}{1-k^2\sin^2\Psi}}\,d\Psi = \frac{k_1'}{k'}\left(1-\frac{k^2}{h^2}\sin^2\Psi\right)dv$$

$$= \frac{k_1'}{k'}\left\{1-\frac{k^2k_1'^2}{h^2k'^2}\,\frac{sn^2(v,k_1)}{1-sn^2(v,k_1)\left(1-\frac{k_1'^2}{k'^2}\right)}\right\}dv,$$

das nach Einführung des in k_1 und k_1' ausgedrückten Werthes von $\frac{k^2}{h^2}$ sofort übergeht in:

$$\sqrt{\frac{1-\frac{k^2}{h^2}\sin^2\Psi}{1-k^2\sin^2\Psi}}\,d\Psi = \frac{k_1'}{k'}\,\frac{dv}{1-\left(1-\frac{k_1'^2}{k'^2}\right)sn^2(v,k_1)}.$$

Aber dieses Differential bedürfte einer neuen, übrigens imaginären Transformation, um es in eine der Jacobischen Formen umzugiessen, denn hier ist:

$$k_1^2 = \frac{h^2k^2 - k^2}{h^2 - k^2} = \frac{z_1^2 - z_2^2}{z_3^2 - z_2^2} < 0 \quad \text{und} \quad k_1'^2 = \frac{h^2 - h^2k^2}{h^2 - k^2} > 1.$$

Solche wiederholte Umformung ist nicht nöthig, wenn wir mit (19) umgekehrt operiren, also setzen

$$\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} = k^2, \text{ woraus } \alpha = \frac{1}{k'} \text{ folgt, und } \frac{\alpha^2 - k_1'^2}{\alpha^2} = \frac{k^2}{h^2},$$

woraus

$$k_1^2 = \frac{k^2(1-h^2)}{h^2(1-k^2)} = \frac{z_2^2 - z_1^2}{z_3^2 - z_1^2} < 1 \text{ und}$$

$$k_1'^2 = \frac{h^2 - k^2}{h^2(1-k^2)} = \frac{z_3^2 - z_2^2}{z_3^2 - z_1^2} < 1.$$

Wir haben demnach das reelle Resultat:

$$\sqrt{\frac{1 - \frac{k^2}{h^2}\sin^2\Psi}{1 - k^2\sin^2\Psi}}\, d\Psi = \frac{1}{k'}\left(1 - \frac{k^2}{h^2}\sin^2\Psi\right) dv$$

$$= \frac{1}{k'}\left\{1 - \frac{k^2}{h^2}\frac{1}{k'^2}\frac{sn^2(v, k_1)}{1 - sn^2(v, k_1)\left(1 - \frac{1}{k'^2}\right)}\right\} . dv$$

$$= \frac{1}{k'} dv - \frac{1}{k'^3}\frac{k^2}{h^2}\frac{sn^2(v, k_1)\, dv}{1 + \frac{k^2}{k'^2} sn^2(v, k_1)}.$$

Zuvor hatten wir gesetzt $snu = \sin\Psi$. Entsprechende Grenzen sind demnach $0, K, 2K \ldots$ für u, und $0, \pi/2, \pi \ldots$ für Ψ, wobei wir uns erinnern dass wir die Bewegung für $u = K$ ihren Anfang nehmen liessen, und dass für $u = 2K$ der Schwerpunkt seine tiefste Lage erreichte.

Soll die Integration bis zu dieser ausgeführt werden, dann ist über Ψ von $\pi/2$ bis π zu integriren. Wegen

$$tg\,\Psi = tnu = \alpha\, tn(v, k_1) = \frac{1}{k'} tn(v, k_1),$$

erreicht aber am (vk_1) gleichzeitig mit Ψ die Werthe $0, \pi/2$ und π, d. h. v die Werthe K_1 und $2K_1$. Wir haben also anzusetzen wenn $s = s$ und $v = v$ für $u = u$,

$$\int_0^s ds = s = 2lh \int_{K_1}^{v} \left\{ \frac{1}{k'} - \frac{1}{k'^3} \frac{k^2}{h^2} \frac{sn^2(vk_1)}{1+\frac{k^2}{k'^2} sn^2(v, k_1)} \right\} dv.$$

$$s = \frac{2lh}{k'}(v-K_1) - \frac{2lk^2}{hk'^3} \int_{K_1}^{v} \frac{sn^2(vk_1)\ dv}{1+\frac{k^2}{k'^2} sn^2(vk_1)}.$$

Dieses letzte Integral geht sofort in die Jacobische Normalform über, wenn wir setzen

$$\frac{k^2}{k'^2} = -k_1^2\, sn^2(a, k_1), \tag{20}$$

wo a imaginär, also gleich $i\gamma$ zu nehmen sein wird, ferner dasselbe im Zähler und Nenner mit $k_1^2\, sn(a, k_1)\, cn(a, k_1)\, dn(a, k_1)$ multipliziren. Uebrigens folgt leicht:

$$sn^2(a, k_1) = \frac{z_1+z_3}{z_1+z_2} < 0.$$

Es ist dann, da

$$\int_{K_1}^{v} \frac{k_1^2\, sn(ak_1)\, cn(ak_1)\, dn(ak_1)\, sn^2(vk_1)\ dv}{1-k_1^2\, sn^2(ak_1)\, sn^2(vk_1)}$$

$$= \Pi(v, a) - \Pi(K_1\, a)$$

$$s = \frac{2lh}{k'}(v-K_1) - \frac{2lk^2}{hk'^3} \frac{1}{k_1^2\, sn(ak_1)\, cn(ak_1)\, dn(ak_1)} \Big| \times \{ \Pi(v, a) - \Pi K_1, a \{ \Big| \tag{21}$$

und, wegen (20), und da $\Pi(K_1\, a) = K_1\ Z(a)$,

ferner $$\Pi(v, a) = v\, Z(a) + \frac{1}{2} lg \frac{\vartheta(v-a)}{\vartheta(v+a)}$$

$$s = \frac{2lh}{k'}(v-K_1) + \frac{2l}{hk'} \frac{sn(ak_1)}{cn(ak_1)\, dn(ak_1)} \times$$

$$\left\{ v\, Z(a) + \frac{1}{2} lg \frac{\vartheta(v-a)}{\vartheta(v+a)} - K_1\, Z(a) \right\}.$$

Aus (21) folgt dass wenn $z = z_2$, wo $v = 2K_1$, da $\Pi(2K_1\, a) = 2K_1\ Z(a)$

$$s_{(z_2)} = \left(\frac{2lh}{k'} + \frac{2l}{hk'} \frac{sn(ak_1)}{cn(ak_1)\, dn(ak_1)} Z(a) \right) K_1$$

und schliesslich, da $\Pi(mK_1, a) = mK_1 Z(a)$ dass der Bogen s beim Herauf- und Herabsteigen der Geraden stets wächst um dieselbe Grösse

$$\left(\frac{2lh}{k'} + \frac{2l}{hk'} \frac{sn(ak_1)}{cn(ak_1)\, dn(ak_1)} Z(a) \right) K_1.$$

Es mag noch die Frage aufgeworfen werden, ob es möglich, die Bewegung der Geraden so zu gestalten, dass der Punkt A auf der z Axe sich nicht verrückt, die Gerade also einen Kegel beschreibt? Dann muss $\frac{dz}{dt}$ identisch Null, also, da Gleichung (4*)

$$l^2 \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{3g}{2} \left[(l^2 - z^2)(z_4 + z_0 - z) - (l^2 - z_0^2) z_5 \right]$$

sich hier umwandelt in $l^2 \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{3g}{2} (l^2 - z^2)(z_4 - z_5)$,

z_4 gleich z_5 sein, d. h. $d = 0$; eine vertikale Anfangsgeschwindigkeit darf nicht vorhanden sein.

Ferner folgt, da $v^2 = v_0^2 + \frac{3g}{2}(z_0 - z)$, dass hier $v^2 = v_0^2$, die Bewegung somit eine gleichmässige wird.

Weiter wird $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$ und damit, wegen III,

$$\lambda = -\frac{3}{4} \frac{gl}{z}.$$

Nun ist $\lambda = \dfrac{v_0^2 - \frac{3g}{4} z}{l}$, somit $v_0^2 = l\lambda + \frac{3gz}{4}$

$$= \frac{3g}{4} \left(z - \frac{l^2}{z} \right) = \frac{3g}{4} \frac{(z^2 - l^2)}{z}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann nur positiv sein für negative z; die Kegelbewegung der Geraden ist also

nur unterhalb der xy Ebene möglich, und nur wenn dem Punkte B die Anfangsgeschwindigkeit $b = \sqrt{3g\frac{(z_0^2 - l^2)}{z_0}}$ ertheilt wird.

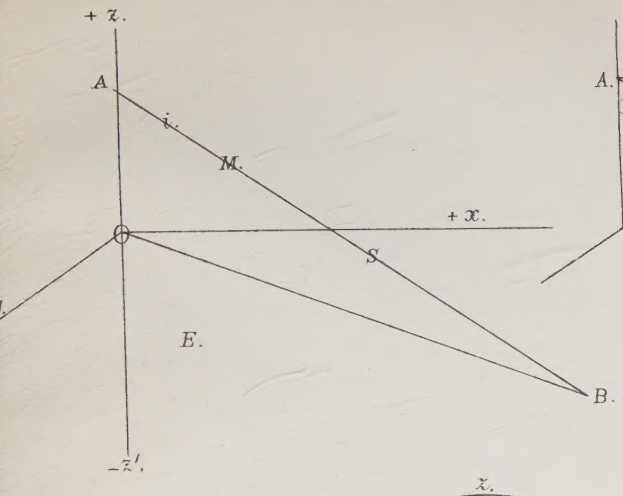
Dann aber findet weder Heben noch Senken der Geraden statt, denn hier ist die Centrifugalkraft

$\frac{v_0^2}{\varrho} = -\frac{3g}{4z}\sqrt{l^2 - z^2}$ gleich der Horizontalcomponante von λ, die

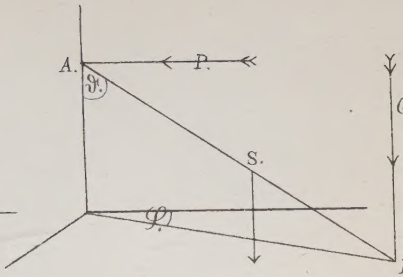
$$= -\frac{3g}{4z}\, l\, \frac{\sqrt{l^2 - z^2}}{l} = -\frac{3g}{4z}\sqrt{l^2 - z^2}$$ wie zuvor,

und die Vertikalcomponante von λ hebt die Schwerkraft auf, denn jene ist $= +\frac{3g}{4z}\, l\, \frac{z}{l} = \frac{3g}{4}$, d. h. entgegengesetzt gleich dem im Punkte S wirkenden Theile der Schwere.

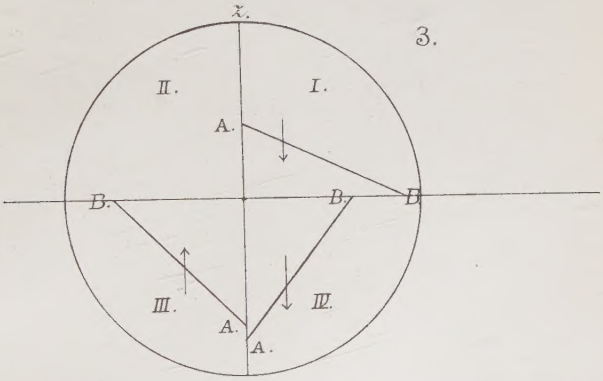
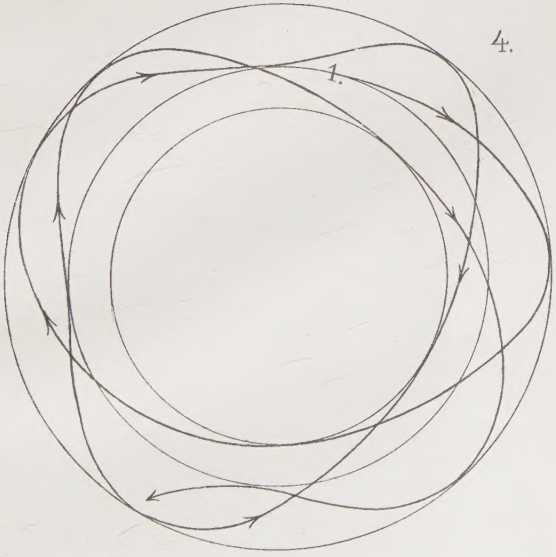
1.



2.



3.



4.